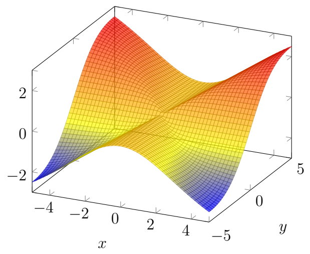
Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$

Les exercices ou les questions marqués d'une étoile ne sont pas prioritaires.

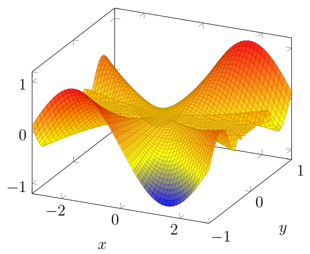
1 Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ et différentielle

Exercice 1. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$.



1. La fonction f est-elle continue ?
2. La fonction f admet-elle des dérivées partielles ?
3. La fonction f est elle de classe $\mathcal{C}^1$?
4. La fonction f est-elle différentiable sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 2.* Soit $\mathcal{U} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | y \neq 0\}$. On considère l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = \begin{cases} y^2 \sin\left(\frac{x}{y}\right) & \text{si } (x,y) \in \mathcal{U} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$.



1. Montrer que $\mathcal{U}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{U}$.
2. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
3. Montrer que f a des dérivées partielles en tout point de $\mathbb{R}^2$. Les calculer.
4. Montrer que la fonction $\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue.
5. Montrer que la fonction f n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$.

Exercice 3. Calculer la différentielle de chacune des fonctions suivantes :
1. $m = p^5 q^3$, 2. $R = \alpha\beta^2\cos(\gamma)$

2 Règle de la chaîne

Exercice 4. On considère les fonctions $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ et $g\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ définies par

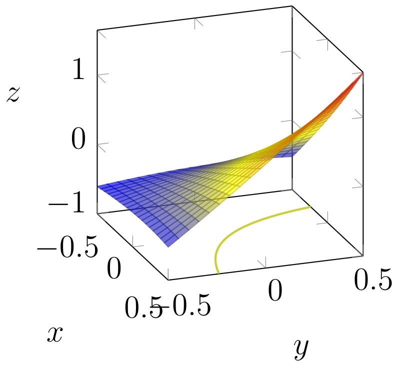
$$f(x,y) = (\cos(xy), y, x\exp(y^2)), \quad g(u,v,w) = uvw.$$

1. Calculer explicitement $g \circ f$.
2. En utilisant l'expression trouvée en (1), calculer les dérivées partielles de $g \circ f$.
3. Déterminer les matrices jacobiennes $J_f(x, y)$ et $J_g(u, v, w)$ de f et de g.
4. Retrouver le résultat de la question 2. en utilisant un produit approprié de matrices jacobiennes.

Exercice 5. Soit $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert $\mathcal{U}$ de $\mathbb{R}^2$. Calculer $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2$ en coordonnées polaires. *Indication : On demande en fait d'exprimer les dérivées partielles de f en fonction des dérivées partielles de $g : (r, \theta) \mapsto f(r\cos(\theta), r\sin(\theta))$.*

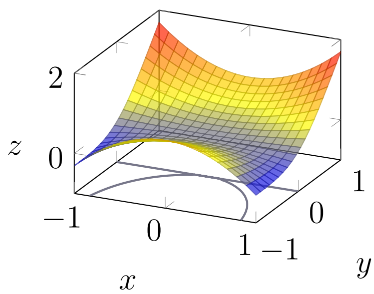
3 Fonctions implicites

Exercice 6. On considère l'équation $xe^y + ye^x = 0$:



1. Vérifier qu'elle définie une et une seule fonction $y = \varphi(x)$ au voisinage de $(0, 0)$.
2. Calculer le développement de Taylor de φ à l'ordre 2 centré en $x = 0$.

Exercice 7.* On considère la fonction définie par $f(x, y) = x^2y + \ln(1 + y^2)$ dont voici le graphe :



1. Vérifier que le théorème des fonctions implicites ne s'applique pas à l'origine.
2. Montrer que, au voisinage de l'origine, l'ensemble $L_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | f(x, y) = 0\}$ est constitué de l'axe des abscisses et d'une courbe dont on déterminera une expression.

4 Équations aux dérivée partielles

Exercice 8. (Primitives) Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ solutions des systèmes suivants :

1. $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = xy^2 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = yx^2 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = e^x y \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = e^x + 2y \end{cases}$

Exercice 9. (Fonctions invariantes par translation) On cherche à déterminer les fonctions $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ vérifiant pour tout $x, y, t \in \mathbb{R}$:

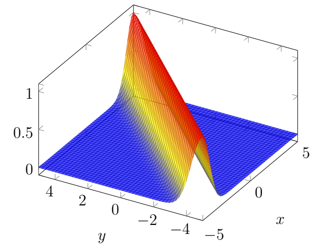
$$f(x+t, y+t) = f(x,y)$$

1. Démontrer que, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0.$$

2. On pose $u = x+y$ et $v = x-y$ et $F(u,v) = f(x,y)$. Démontrer que $\frac{\partial F}{\partial u} = 0$.
3. Conclure.

Indication : Voici un exemple de solution :

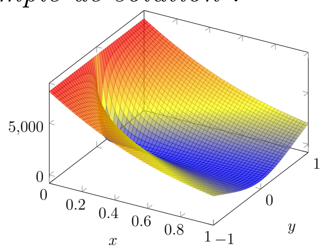


$$f(x,y) = \exp(-(x-y)^2)$$

Exercice 10.* Trouver toutes les applications f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = \sqrt{x^2+y^2} \qquad (*)$$

sur $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \ x > 0\}$. *Indication : on pourra passer en coordonnées polaires. Voici un exemple de solution :*



$$f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} - (\arctan(y/x))^2$$